Théorie de la mesure et intégration : ce qu'il faut savoir

1 Théorie de la mesure

- Une mesure vérifie les propriétés que l'on attend d'une fonction "longueur" ou "volume" : l'ensemble vide est de mesure nulle et la mesure d'une union disjointe est la somme des mesures.
- On se peut pas espérer mesurer tous les ensembles ; aussi on introduit le concept de *tribu* : un ensemble de parties stable par passage au complémentaire, par intersections et unions **dénombrables**. Une tribu regroupe tous les ensembles que l'on peut mesurer.
- Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on considère la tribu des boréliens, ie la tribu engendrée par les ouverts. Un telle tribu regroupe beaucoup d'ensembles : tout ensemble que l'on peut décrire comme union dénombrable d'intersection dénombrable d'union dénombrable etc... d'ensembles ouverts est un borélien.
- La *mesure de Lebesgue* sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^n$ prolonge la longueur/le volume usuel des intervalles, des cubes. On la note souvent λ.
- On définit ensuite la mesurabilité d'une fonction. Moralement, toute fonction que l'on peut exprimer à l'aide de formules mathématiques est mesurable. En pratique, on montre qu'une fonction est mesurable en montrant qu'elle s'obtient à l'aide des opérations usuelles : combinaison linéaire, multiplication, limite simple de fonctions "de base" : fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables ou fonctions continues.
- Les ensembles *négligeables* jouent un rôle particulier en théorie de la mesure. Bien comprendre la notion de propriété vraie presque partout (souvent noté p.p. ou μ-p.p.). Se souvenir que les ensembles négligeables sont stables par union dénombrable quelconque ($\mu(\cup A_n) \leqslant \sum_n \mu(A_n) = 0$).

2 Intégration

On ne considérera que l'intégrale de Lebesgue. En pratique, on ne se sert que rarement de la construction de l'intégrale en termes de fonctions étagées. L'important est de retenir les propriétés que vérifient l'intégrale et surtout de savoir les manipuler. En voici une liste qu'il faut absolument connaître.

2.1 Opérations sur les intégrales

- Tout d'abord, l'intégrale de Lebesgue prolonge l'intégrale de Riemann ; ce que l'on savait donc faire pour Riemann fonctionne encore pour Lebesgue. Par exemple, le calcul des intégrales sur $[a, b]$ par changement de variables, l'intégration par parties, une fonction C^1 est l'intégrale de sa dérivée, etc...

- L'intégrale des fonctions étagées

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i} \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda(A_i),$$

  et le cas particulier dont on se sert tout le temps

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \,\mathrm{d}\lambda = \lambda(A).$$

– Si A et B sont disjoints, alors $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

– Si $\lambda(N) = 0$, alors $\int_N f = 0$. Ainsi $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n\setminus N} f + \int_N f = \int_{\mathbb{R}^n\setminus N} f$.

– $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$.

– Si $f \leqslant g$, alors $\int f \leqslant \int g$. En particulier, si f est bornée sur un borélien A de mesure finie, et si $M = \sup_A f$, alors $\int_A f \mathrm{d}\lambda \leqslant M \int_A \mathrm{d}\lambda = M\lambda(A)$, ce dont on se sert tout le temps.

2.2 fonctions intégrables

– L'intégrale d'une fonction mesurable **positive** existe toujours (mais peut être infinie). La notation $\int f \mathrm{d}\lambda$ a donc toujours un sens si f est positive.

– Pour montrer que l'intégrale d'une fonction f de signe quelconque existe, on étudie la fonction positive $|f|$. On a donc toujours le droit d'écrire $\int |f| \mathrm{d}\lambda$, mais la notation $\int f \mathrm{d}\lambda$ n'a pas toujours un sens. Pour montrer que $\int |f| < +\infty$, on compare souvent $|f|$ à une fonction g dont on sait qu'elle est intégrable avec $|f| \leqslant g$.

– On autorise une fonction mesurable à prendre des valeurs infinies. Se rappeler cependant qu'une fonction intégrable est finie presque partout.

– Ne pas oublier qu'une fonction bornée est toujours intégrable sur un ensemble de mesure finie. En particulier, une fonction continue est intégrable sur un compact.

2.3 Théorèmes de convergence

– Le théorème de convergence monotone suppose que l'on a une suite **croissante** (f_n) de fonctions mesurables **positives**. Alors on peut permuter limite et intégrale : $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ (se rappeler que $\lim f_n$ est automatiquement mesurable et positive, donc son intégrale est bien définie). On se sert aussi de la version séries de ce théorème, appelée parfois théorème de Beppo-Levi : soit (u_n) une suite de fonctions mesurables **positives** (attention : on ne suppose plus croissante ici). Alors on peut permuter série et intégrale : $\sum \int u_n = \int \sum u_n$. Remarquer que ce théorème est une conséquence directe du théorème de convergence monotone appliqué à la suite de fonctions $f_N = \sum_{n\leqslant N} u_n$ qui est croissante car les u_n sont positives.

– Le lemme de Fatou est d'usage moins fréquent et permet d'enlever l'hypothèse que la suite de fonctions (f_n) est croissante. Par contre, elles doivent rester **positives**. Ayant moins d'hypothèses, la conclusion est donc moins forte : on a un résultat d'inégalité sur des limites inférieures des f_n.

– Le théorème de convergence dont on se servira le plus est le théorème de convergence dominée. On considère une suite (f_n) de fonctions mesurables (attention : on ne suppose ni que la suite est croissante ni que les fonctions sont positives), qui converge **presque partout** vers f mesurable. De plus, on a une hypothèse de *domination* : il existe une fonction g intégrable telle que pour tout n, $|f_n| \leqslant g$ presque partout. Alors $\lim \int |f_n - f| = 0$, et en particulier $\int f_n \to \int f$. On remarque qu'on obtient un résultat sur l'intégrale des f_n, c'est pourquoi on ne peut supposer qu'une convergence presque partout (car modifier les f_n sur un ensemble de mesure nulle ne change rien à la valeur de l'intégrale). On remarque ensuite que l'hypothèse de domination entraîne automatiquement par comparaison que f_n est intégrable pour tout n, et en passant à la limite presque partout on obtient $|f| \leqslant g$ presque partout, et donc f est aussi intégrable. Les quantités $\int |f_n - f|, \int f_n$, et $\int f$ ont donc un sens. En pratique, les hypothèses de convergence et de domination ont en fait lieu partout, sauf en un nombre fini de points qui nous embêtent.

– Pour étudier la limite d'une suite d'intégrales, on regarde le type de convergence des fonctions. Si elles sont positives, cela vaut souvent le coup d'étudier la croissance de la suite pour conclure directement avec le théorème de convergence monotone, ce qui n'est pas toujours évidente au premier abord : méditer sur la croissance de la suite

$$f_n(x) := \chi_{[0,1]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Sinon, il faudra utiliser le théorème de convergence dominée, et faire particulièrement attention à l'hypothèse de domination qui peut nécessiter une majoration fine de la suite de fonctions : par exemple trouver une bonne majoration de la suite

$$f_n(x) := \chi_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2},$$

pour lui appliquer le théorème de convergence dominée.

3 Intégrales à paramètres, théorème de changement de variables, théorème de Fubini