Partiel d'Analyse

Mardi 7 décembre 2010

Documents **non autorisés** - Durée **1 heure**

1 Questions de cours

(7 points)

1. Enoncer le Théorème du point fixe de Picard.
2. Donner la définition d'une tribu sur un ensemble X.
3. Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Enoncer le Théorème de la convergence dominée.
5. Donner la définition de l'ensemble $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$.
6. Donner la définition d'une distribution sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}$.
7. Montrer que la convergence dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2 Exercices d'application

(6 points)

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on note $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$.
a- Etudier la convergence de φ_n dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
b- Etudier la convergence de φ_n dans $L^1(\mathbb{R})$.

2. Soit T la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),\ \langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x,x)\, dx.$$

Vérifier que T définit une distribution d'ordre 0 et montrer que $\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = \delta_{(0,0)}$.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres réels tendant vers $+\infty$. Soit T définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{(n)}(a_n).$$

Montrer que T définit bien une distribution.

4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continûment dérivable. On suppose que les fonctions f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(x)$ admet une limite a_+ lorsque x tend vers $+\infty$, puis que $a_+ = 0$. Montrer de même que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$. En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, dx$.

3 Exercice. $L^{p'}$ s'identifie avec le dual de L^p.

(10 points)

Soit p un réel tel que $1 < p \leqslant 2$ et p' l'exposant conjugué de p, défini par $p' = p/(p-1)$, ou de façon équivalente par $1/p + 1/p' = 1$. L'objectif de cet exercice est de montrer que $L^{p'}(]0,1[)$ s'identifie avec le dual (topologique) de $L^p(]0,1[)$, autrement dit qu'il existe une bijection naturelle entre $L^{p'}(]0,1[)$ et $(L^p(]0,1[))'$, l'ensemble des formes linéaires continues sur $L^p(]0,1[)$.

Pour $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ et $f \in L^q(]0,1[)$, on note $\|f\|_q$ la norme de f dans $L^q(]0,1[)$. On rappelle l'inégalité de Hölder : soit $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, q' l'exposant conjugué de q (défini par $1/q + 1/q' = 1$), $u \in L^q(]0,1[)$ et $v \in L^{q'}(]0,1[)$. Alors $uv \in L^1(]0,1[)$ et

$$\|uv\|_1 \leqslant \|u\|_q \, \|v\|_{q'}.$$

1. Soit $f \in L^{p'}(]0,1[)$. Montrer que pour tout $g \in L^p(]0,1[)$, la fonction fg est intégrable sur $]0,1[$. On pose

$$(Tf)(g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Montrer $Tf\,:\,g \mapsto Tf(g)$ définit une forme linéaire continue sur $g \in L^p(]0,1[)$, i.e. un élément de $(L^p(]0,1[))'$, puis que

$$\begin{array}{rccc} T: & L^{p'}(]0,1[) & \longrightarrow & (L^p(]0,1[))' \\ & f & \longmapsto & Tf \end{array}$$

est une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1.

Les questions 2 et 3 visent à établir que T est une isométrie bijective, qui permet d'identifier le dual de $L^p(]0,1[)$ avec $L^{p'}(]0,1[)$, ce qu'on note $(L^p(]0,1[))' \simeq L^{p'}(]0,1[)$.

2. L'objectif de cette question est de montrer que T est surjective.

2.a. Soit $g \in L^2(]0,1[)$. En utilisant l'inégalité de Hölder avec $q = 2/p$, montrer que $g \in L^p(]0,1[)$ et que $\|g\|_p \leqslant \|g\|_2$.

2.b. Soit $\varphi \in (L^p(]0,1[))'$. Comme, d'après la question précédente, $L^2(]0,1[) \subset L^p(]0,1[)$, on peut considérer la restriction de φ à $L^2(]0,1[)$, que l'on note $\varphi_{|L^2(]0,1[)}$. Montrer que $\varphi_{|L^2(]0,1[)} \in (L^2(]0,1[))'$. En déduire qu'il existe $f \in L^2(]0,1[)$ telle que

$$\forall g \in L^2(]0,1[), \qquad \varphi(g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra appliquer le Théorème de représentation de Riesz: Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et b une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall v \in H, b(v) = \langle u, v\rangle$.

2.c. On veut à présent montrer que $f \in L^{p'}(]0,1[)$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n := \chi_{\{|f|\leqslant n\}}\mathrm{sgn}(f)|f|^{p'-1},$$

où $\{|f| \leqslant n\} := \{x \in]0,1[, |f(x)| \leqslant n\}$, où $\chi_{\{|f|\leqslant n\}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{|f| \leqslant n\}$, et où $\mathrm{sgn}(a)$ désigne l'application "signe" : $\mathrm{sgn}(a) := a/|a|$ si $a \neq 0$ et $\mathrm{sgn}(0) := 0$. Montrer que $f_n \in L^\infty(]0,1[)$ pour tout n, et donc que $f_n \in L^2(]0,1[)$. En considérant les quantités $|\varphi(f_n)|$, montrer ensuite que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\int_0^1 \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)|f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'}. \tag{1}$$

Enfin, en appliquant le théorème de convergence monotone (qui dit que si $h_n(x)$ est une suite *croissante* de fonctions mesurables *positives* qui converge simplement vers la fonction $h(x)$, alors $\lim_{n\to\infty}\int h_n = \int h$), montrer que $f \in L^{p'}(]0,1[)$.

2.d. Montrer que $\varphi = Tf$. On pourra pour cela utiliser la densité de $L^2(]0,1[)$ dans $L^p(]0,1[)$. Conclure sur le caractère surjectif de T.

3. L'objectif de cette question est de montrer que T est une isométrie, i.e. que pour tout $f \in L^{p'}(]0,1[)$, $\|Tf\|_{(L^p(]0,1[))'} = \|f\|_{L^{p'}(]0,1[)}$, et donc en particulier que T est injective. Soit donc $f \in L^{p'}(]0,1[)$. Déduire de la question précédente que $\|Tf\|_{(L^p(]0,1[))'} \geqslant \|f\|_{L^{p'}(]0,1[)}$. Conclure.