

THÉORÈME DE FUBINI

1 Énoncé

Théorème 1.1 (Fubini positif). Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $\Omega_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \Omega_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ des boréliens. Soit f une fonction mesurable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ (pour la tribu $\mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$), et **positive**. Alors

1. Les fonctions

$$x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 \quad \text{et} \quad x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) dx_1$$

sont bien définies (en tant qu'intégrales de fonctions mesurables positives) et **mesurables**.

2. On a de plus les égalités suivantes

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

Remarque 1.1. Dans le théorème, on relie l'intégrale d'une fonction de deux variables sur la tribu $\mathcal{B}(\Omega_1 \times \Omega_2)$, pour la mesure de Lebesgue sur cette tribu, à deux intégrales successives de fonctions d'une seule variable. Ce premier théorème dit qu'on peut donc "permuter" deux signes intégraux dans un cas très faible, celui des fonctions mesurables positives.

Théorème 1.2 (Fubini). Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $\Omega_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \Omega_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ des boréliens. Soit $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors

1. Les fonctions

$$\tilde{f}_1 : x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 \quad \text{et} \quad \tilde{f}_2 : x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) dx_1$$

sont définies presque partout, et la fonction f_1 définie par $f_1(x) = \tilde{f}_1(x)$ là où $\tilde{f}_1(x)$ existe et $f_1(x) = 0$ ailleurs est dans $L^1(\Omega_1)$. De même, la fonction f_2 définie de manière analogue est dans $L^1(\Omega_2)$.

2. De plus on a les égalités

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_{\Omega_1} f_1(x_1) dx_1 = \int_{\Omega_2} f_2(x_2) dx_2 \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2. \end{aligned}$$

Remarque 1.2. Dans le cas où f n'est plus positive, la formule finale reste la même mais la conclusion 1. est légèrement différente, du fait qu'on ne manipule plus forcément des fonctions positives. Il faut en effet que tous les membres de la dernière formule soient des objets bien définis. Il faut faire attention à l'hypothèse $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, qui se montre (comme d'habitude) en montrant que $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(x, y)| < \infty$. Souvent, on montrera ce fait en utilisant la version positive du théorème de Fubini à la fonction $(x, y) \mapsto |f(x, y)|$, qui est bien mesurable positive. Ainsi, pour calculer $\int |f|$, on peut intégrer indifféremment d'abord en x ou d'abord en y , par le théorème de Fubini positif.

Remarque 1.3. Attention, il existe des fonctions pour lesquelles on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini, cf poly exercice 4.9 p54.

2 Une application du théorème de Fubini : la convolution

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On définit la convolée de f et g , notée $f \star g$ par

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) \, dt.$$

Montrer que $f \star g$ est définie presque partout et que $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer de plus que

$$\|f \star g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$