Exercices : Théorie de la mesure et intégration

Exercice 1 *(Vrai ou Faux)*

Dire si chacune des propositions suivante est vraie ou fausse, et le justifier en fournissant une démonstration ou un contre-exemple.

1. Une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ a une limite en $+\infty$.

2. Tout borélien de $\mathbb{R}$ s'écrit comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts ou fermés.

3. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables bornées sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui converge presque partout vers une fonction f. Alors $\int_I f_n \to \int_I f$.

4. Soit (H_n) une suite croissante d'intervalles dont l'union vaut $\mathbb{R}$. Soit f une fonction mesurable. On suppose que f est intégrable sur chacun des H_n et que $(\int_{H_n} f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

5. Même question en supposant f positive.

6. La fonction
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}\chi_{[n,n+1[}$$
est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 *(Montrer qu'un ensemble est mesurable)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur un espace mesurable $(X, \mathcal{T})$. Montrer que l'ensemble des points de convergence de (f_n), ie l'ensemble
$$A := \{x \in X;\ \exists \ell(x) \in \mathbb{R}, f_n(x) \to \ell(x)\,(n \to \infty)\}$$
est mesurable. Indice : utiliser un critère de Cauchy.

Exercice 3

Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$. Indice : on montrera que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme union dénombrable d'intervalles ouverts.

Exercice 4 *(Contre-exemples au théorème de convergence dominée)*

Etudier la convergence presque partout et la convergence des intégrales des fonction suivantes :
$$f_n := n\chi_{[0,1/n]};\ g_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]};\ h_n := \chi_{[n,n+1[}.$$
Quelle hypothèse du théorème de convergence dominée ne peut-on pas vérifier ?

Exercice 5 *(De la convergence dominée)*

Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x;\ \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$
Indice : on pourra montrer et utiliser l'inégalité $\log(1+u) \leqslant u$, $\forall u > -1$.

Exercice 6 *(Théorème de Beppo-Levi et applications)*

Une conséquence quasi-immédiate du théorème de convergence monotone est le

Théorème 0.1 (Beppo-Levi)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$. Alors l'application $x \in X \mapsto \sum_{n \geqslant 0} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}_+}$ est mesurable positive, et on a*

$$\int_X \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x).$$

Remarque 0.1. *Ce théorème dit que pour des fonctions positives, on peut permuter série et intégrale.*

En utilisant ce théorème, montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\, \mathrm{d}x = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Appliquer également ce théorème à la suite de fonctions $f_n(x) = x^{2n}(1-x)$ sur $[0,1]$ pour retrouver la formule

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 7 *(Uniforme continuité de l'intégrale)*

1. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}_+}$ une fonction intégrable sur X. On définit $E_n = \{x \in X, f(x) > n\}$. Montrer que $\int_{E_n} f \mathrm{d}\mu \to \infty$ quand $n \to \infty$.

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(A) < \delta$, on a $\int_A f \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.