# Corrigé Quizz 2010

## 1 Exercices d'application

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on note $\varphi_n(x) = \varphi(x+n)$. Soit $M > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset [-M, M]$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset [-M-n, M-n]$.

a- Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Soit $K > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(\psi) \subset [-K, K]$. Comme $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\psi(x)\,dx, \\ &= \int_{-K}^{K} \varphi_n(x)\psi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Pour $n \geq M + K + 1$, on a $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \cap \mathrm{Supp}(\psi) = \emptyset$ et donc $\int_{-K}^{K} \varphi_n(x)\psi(x)\,dx = 0$. Donc on a

$$\langle \varphi_n, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

donc $(\varphi_n)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(R)$.

b- Si $(\varphi_n)$ convergeait vers une fonction $f$ dans $L^1(\mathbb{R})$, comme la convergence dans $L^1(\mathbb{R})$ entraîne la convergence au sens des distributions, et par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on aurait nécessairement $f = 0$ d'après la question précédente. Par ailleurs, on a

$$\|\varphi_n\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n| = \int_{\mathbb{R}} |\varphi| = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Donc nécessairement, si $\varphi \neq 0$, comme $\varphi$ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on a $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})} > 0$ et la suite $(\varphi_n)$ ne peut donc pas converger dans $L^1(\mathbb{R})$. Moralité: $(\varphi_n)$ ne converge dans $L^1(\mathbb{R})$ que si $\varphi$ est identiquement nulle et dans ce cas, $(\varphi_n)$ converge bien vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$.

2. Tout d'abord, on remarque que $T$ définit bien une distribution puisque $T$ définit bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et si $K$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^2$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset K$, et si $M > 0$ est telle que $K \subset [-M, M]^2$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq M \sup_{(x,y)\in K} |\varphi(x, y)|.$$

Donc $T$ est une distribution d'ordre 0.

Par définition de la dérivée au sens des distributions, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \rangle &= -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rangle, \\ &= -\int_0^\infty \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, x) \right) dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs soit $\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(x, x)$. On remarque que $\psi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, x)$. Donc,

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}, \varphi \rangle &= -[\psi(x)]_0^\infty, \\ &= \psi(0) = \varphi(0, 0), \\ &= \langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = \delta_{(0,0)}$.

3. Soit $K$ un compact de $\mathbb{R}$, soit $M>0$ tel que $K\subset[-M,M]$ et soit $\varphi\in\mathcal{D}_K(\mathbb{R})$. Soit $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq n_0$, $a_n\geq M$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle T,\varphi\rangle &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\varphi^{(n)}(a_n),\\ &= \sum_{n=0}^{n_0-1}\varphi^{(n)}(a_n),\\ &\leq n_0\sup_{0\leq k\leq(n_0-1),\,x\in K}|\varphi^{(k)}(x)|.\end{aligned}$$

Donc $T$ définit bien une distribution. Par contre, elle n'est pas d'ordre fini.

4. On remarque qu'on a $f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^{+\infty}\chi_{[0,x]}(t)f'(t)\,dt$. On a que pour tout $x>0$, $|\chi_{[0,x]}f'|\leq|f'|\in L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs, $\chi_{[0,x]}(t)f'(t)\longrightarrow f'(t)$ lorsque $x$ tend vers l'infini. Donc on peut appliquer le théorème de la convergence dominée pour conclure que

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\,dt\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}f'(t)\,dt.$$

Donc $f(x)$ a bien une limite en $+\infty$ qui est $a_+=f(0)+\int_0^\infty f'(t)\,dt$. De même, $f(x)$ a également une limite en $-\infty$ qui est $a_-=f(0)-\int_{-\infty}^0 f'(t)\,dt$. Or comme $f$ est intégrable, on a donc nécessairement $a_+=a_-=0$. Finalement, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)\,dt=a_+-f(0)+f(0)-a_-=0.$$

## 2 Exercice. $(L^p)'\simeq L^{p'}$: on peut enlever les parenthèses.

1. Soit $f\in L^{p'}(]0,1[)$ et $g\in L^p(]0,1[)$. Par l'inégalité de Hölder, $fg\in L^1(]0,1[)$ et

$$|Tf(g)|=\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\|f\|_{p'}\|g\|_p.$$

L'application $Tf$ est donc bien définie car $fg\in L^1$, est manifestement linéaire, et est continue d'après l'inégalité précédente. On a de plus que l'application $f\in L^{p'}(]0,1[)\mapsto Tf\in(L^p(]0,1[))'$ qui est manifestement linéaire. De plus,

$$\forall g\in L^p(]0,1[),g\neq0,\qquad\frac{|Tf(g)|}{\|g\|_p}\leqslant\|f\|_{L^{p'}(]0,1[)},$$

et donc

$$\|Tf\|_{(L^p(]0,1[))'}=\sup_{g\neq0}\frac{|Tf(g)|}{\|g\|_p}\leqslant\|f\|_{L^{p'}(]0,1[)},$$

et $T$ définit donc une application linéaire continue de $L^{p'}(]0,1[)$ dans $(L^p(]0,1[))'$ de norme inférieure ou égale à 1.

2.a. Soit $g\in L^2(]0,1[)$. Comme $2/p\geqslant1$, on a par l'inégalité de Hölder

$$\int_0^1|g(x)|^p\,\mathrm{d}x=\int_0^1|g(x)|^p\times1\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_0^1(|g(x)|^p)^{2/p}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{2}}\left(\int_0^1 1^{\frac{2}{2-p}}\,\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{p}{2}}=\|g\|_2^{\frac{p}{2}},$$

d'où le résultat.

2.b. Soit $g\in L^2(]0,1[)$. D'après la question précédente $g\in L^p(]0,1[)$ et comme $\varphi\in(L^p(]0,1[))'$ on a

$$|\varphi(g)|\leqslant\|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'}\|g\|_p\leqslant\|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'}\|g\|_2.$$

Ainsi $\varphi_{|L^2(]0,1[)}$ est une forme linéaire sur $L^2(]0,1[)$, continue pour la norme de $L^2(]0,1[)$, i.e. $\varphi\in(L^2(]0,1[))'$. D'après le théorème de représentation de Riesz appliqué dans l'espace de Hilbert $L^2(]0,1[)$, on a le résultat.

2.c. On cherche à montrer

$$\left(\int_0^1 \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)|f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'}. \tag{1}$$

On a pour tout $x \in ]0,1[$, $|f_n(x)| \leqslant n^{p'-1}$ et donc $f_n \in L^\infty(]0,1[)$. Comme $L^\infty(]0,1[) \subset L^2(]0,1[)$ (car $\int_0^1 |h|^2 \leqslant \|h\|_\infty^2 \int_0^1 1 = \|h\|_\infty^2 < \infty$ pour tout $h \in L^\infty(]0,1[)$), on a donc $f_n \in L^2(]0,1[)$ et ainsi $f_n \in L^p(]0,1[)$ pour tout $n$. Comme $f_n \in L^2(]0,1[)$ on a

$$\varphi(f_n) = \int_0^1 f_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)|f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x,$$

et comme $f_n \in L^p(]0,1[)$ on a également en remarquant que $p(p'-1) = p'$

$$|\varphi(f_n)| \leqslant \|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'}\|f_n\|_p = \|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'}\left(\int_0^1 \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)\underbrace{|f(x)|^{p(p'-1)}}_{=|f(x)|^{p'}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En regroupant ces deux manières d'écrire $|\varphi(f_n)|$ on obtient donc

$$\int_0^1 \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)|f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x \leqslant \|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'}\left(\int_0^1 \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)|f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

ce qui implique

$$\left(\int_0^1 \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)|f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p'} \leqslant \|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'}, \tag{3}$$

puisque $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$.

On remarque à présent que la suite de fonctions $g_n$ définie par $g_n(x) = \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)|f(x)|^{p'}$ est telle que $g_n$ est mesurable et $g_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que pour tout $x \in ]0,1[$, $g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$. Donc $(g_n)_n$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives. Par ailleurs, la suite $g_n$ converge simplement vers la fonction $|f|^{p'}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone qui implique que

$$\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \chi_{\{|f|\leqslant n\}}(x)|f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 |f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x.$$

Ceci entraîne en faisant tendre $n$ vers l'infini dans (3), que

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p'} = \|f\|_{p'} \leqslant \|\varphi\|_{(L^p(]0,1[))'},$$

et donc $f \in L^{p'}(]0,1[)$.

2.d. D'après la question précédente, $f \in L^{p'}(]0,1[)$ et donc $Tf \in (L^p(]0,1[))'$. Les formes linéaires $Tf$ et $\varphi$ continues **sur** $L^p(]0,1[)$ coïncident sur $L^2(]0,1[)$ qui est dense dans $L^p(]0,1[)$, donc coïncident partout. Ainsi $\varphi = Tf$, d'où $T$ est surjective.

3. Soit $f \in L^{p'}(]0,1[)$. D'après la question précédente appliquée à $\varphi = Tf$, on a bien à la limite $n \to \infty$ dans (3)

$$\|f\|_{L^{p'}(]0,1[)} \leqslant \|Tf\|_{(L^p(]0,1[))'}.$$

Comme on a montré l'inégalité inverse en 1., on a bien $\|f\|_{L^{p'}(]0,1[)} = \|Tf\|_{(L^p(]0,1[))'}$ pour tout $f \in L^{p'}(]0,1[), f \neq 0$, et cette égalité est encore vraie pour $f = 0$. Ainsi $T$ est bien une isométrie, et en particulier est injective (car $Tf = 0 \Rightarrow f = 0$).

**Remarque 2.1.** *On a donc montré le théorème de représentation de Riesz dans les espaces $L^p(]0,1[)$ pour $1 < p \leqslant 2$, en utilisant le théorème de représentation de Riesz dans les Hilbert qui est un résultat beaucoup plus simple, qui découle de l'existence d'un supplémentaire orthogonal à tout sous-espace fermé. On voit que l'on peut étendre cette méthode aux espaces $L^p(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie, mais on ne pourra pas le faire pour $p > 2$, car dans ce cas on n'a plus d'injection continue $L^2 \subset L^p$, et on ne peut pas se ramener à $L^2$. Le théorème de représentation de Riesz dans le cas général est un résultat difficile.*